Universidad de Talca
Campus Curicó

NOTA	

Prueba N° 1

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Módulo:	Carrera:	Sección:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Los útiles (lápiz, goma, etc.) son de uso personal.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
- Queda prohibido el uso de calculadoras y formulario.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **[20 ptos.]** Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que la función siguiente sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} & \text{si } \ x < 1 \\[2ex] a & \text{si } \ x = 1 \\[2ex] \dfrac{2\cdot(\sqrt{x}-1)}{x-1} - b & \text{si } \ x > 1 \end{cases}$$

2) **[20 ptos.]**

a) **[15 ptos.]** Determine la recta tangente a la curva dada por la ecuación

$$x \cdot \sin(2y) = y \cdot \cos(2x)$$

en el punto $P = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) **[5 ptos.]** Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(1-\cos x)}{|x|\cdot x^2}$ no existe.

3) **[20 ptos.]**

a) **[10 ptos.]** Calcular $f''(x)$, donde $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) **[10 ptos.]** Sea $f(x) = \arctan(2x+1)$ y sea $g(x)$ una función derivable en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tal que $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ y $g'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Si $h(x) = g\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$, calcule $(f\circ h)'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Pauta de corrección

1) Para que f sea continua en $x = 1$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = a$$

- $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{(x^2+x+2)\cdot\cos(x-1)} = \frac{1}{4}$

  Luego $a = \dfrac{1}{4}$

- $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - b = 2 \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - b = 2 \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1 - b$

  Por lo tanto la función f es continua en $x = 1$ si $a = \dfrac{1}{4}$ y $1 - b = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow b = \dfrac{3}{4}$.

2) *a*) Derivando implícitamente con respecto a x en ambos lados de la igualdad, queda:

$$\begin{aligned}
x' \cdot \sin(2y) + x \cdot 2y' \cdot \cos(2y) &= y' \cdot \cos(2x) - 2y \cdot \sin(2x) \\
y'(2x \cdot \cos(2y) - \cos(2x)) &= -\sin(2y) - 2y \cdot \sin(2x) \\
y' &= \frac{-\sin(2y) - 2y \cdot \sin(2x)}{2x \cdot \cos(2y) - \cos(2x)} \\
y'\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{-\pi}{-\frac{\pi}{2}} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es $y - \dfrac{\pi}{2} = 2 \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ o bien $y = 2x$

b)
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \frac{x \cdot (1-\cos x)}{(-x)\cdot x^2} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot (1-\cos x)}{(x)\cdot x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Como $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot(1-\cos x)}{|x|\cdot x^2} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot(1-\cos x)}{|x|\cdot x^2}$ el límite no existe.

3) *a*)
- $\displaystyle f'(x) = 1 + \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = 1 + \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$

- $\displaystyle f''(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{-2x\cdot 2}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}$

UTALCA

IMAFI

b)

- $(f \circ h)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$
- $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
- $f'(x) = \dfrac{2}{1+(2x+1)^2} \Longrightarrow f'(0) = 1$
- Finalmente $(f \circ h)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$